

Übungsblatt 2

Abgabe bis Dienstag, den 30. April um 16:00 Uhr

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Beweisen Sie über vollständige Induktion, dass für die n te Fibonacci-Zahl gilt, dass $F_n = 1/\sqrt{5} \cdot (A^n - B^n)$, wobei $A = (1 + \sqrt{5})/2$ und $B = (1 - \sqrt{5})/2$.

Hinweise: Achten Sie darauf, dass sie den Induktionsanfang für $n = 0$ und $n = 1$ zeigen müssen (warum?). Für den Induktionsschritt ist es nützlich zu zeigen, dass A und B beides Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 = x + 1$ sind.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass für alle $x, y > 0$ und $b > 1$ gilt, dass $\log_b x^y = y \cdot \log_b x$.

Folgern Sie daraus, dass für alle $z > 0$ und $b, c > 1$ gilt, dass $\log_b z = A \cdot \log_c z$, wobei $A = \log_b c$.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Seien $n_{k,1}, \dots, n_{k,\ell_k}$ die Teilfelder von *QuickSort* in Rekursionstiefe k im allgemeinen Fall (= in dem wir nichts darüber wissen, wie gut die Pivot-Elemente aufteilen).

Zeigen Sie über vollständige Induktion, dass es eine Konstante A gibt, so dass für jede Rekursionstiefe $k \in \mathbb{N}$ gilt, dass $T(n) \leq T(n_{k,1}) + \dots + T(n_{k,\ell_k}) + k \cdot A \cdot n$.

Nehmen wir jetzt an, es gibt ein $c < 1$, so dass in jedem Aufruf von *quickSortDivide* das gegebene Feld der Größe m immer so geteilt wird, dass beide Teilfelder Größe $\leq c \cdot m$ haben. (Im besten Fall ist immer $c = 1/2$.)

Zeigen Sie, dass dann in Rekursionstiefe k alle Teilfelder Größe höchstens $c^k \cdot n$ haben.

Folgern Sie daraus, dass für Rekursionstiefen $k \geq \log_{1/c} n$ kein Teilfeld mehr größer als 1 ist, das heißt spätestens dann endet die Rekursion.

Folgern Sie daraus, dass es eine Konstante D gibt, so dass $T(n) \leq D \cdot n \cdot (1 + \log_2 n)$, das heißt, auch in diesem Fall ist die Laufzeit proportional zu $n \cdot \log n$.

[bitte wenden]

Committen Sie Ihre Lösung bitte *ausschließlich als PDF* in das SVN, in einen neuen Unterordner *uebungsblatt_02*.

Committen Sie in diesem neuen Unterordner außerdem wie beim letzten Mal eine Textdatei *erfahrungen.txt*. Beschreiben Sie dort in ein paar Sätzen Ihre Erfahrungen mit diesem Übungsblatt und den Vorlesungen dazu. Insbesondere: Wie lange haben Sie ungefähr gebraucht? An welchen Stellen gab es Probleme und wieviel Zeit hat Sie das gekostet?