Informatik II: Algorithmen und Datenstrukturen SS 2013

Vorlesung 6b, Mittwoch, 29. Mai 2013
(Dynamische Felder: amortisierte Analyse)

Prof. Dr. Hannah Bast
Lehrstuhl für Algorithmen und Datenstrukturen
Institut für Informatik
Universität Freiburg

Blick über die Vorlesung heute

- Musterlösung für das Ü5
  - Besprechung der Histogramme / Erklärung dazu
- Dynamische Felder
  - Gestern: Implementierung + erste Analyse
  - Heute: vollständige Laufzeitanalyse
  - Neue Technik: **amortisierte Analyse**
  - Übungsblatt 6: Erweiterung des Codes aus der Vorlesung und Laufzeitanalyse dazu (nach dem Vorbild aus der Vorlesung)

Dynamische Felder 5/5

- Was machen wir wenn Elemente entfernt werden
  - Analog zum Vergrößern, könnten wir das Feld auf die Hälfte verkleinern wenn es nur noch halbvoll ist

    Aber Achtung: wenn man danach ein append macht muss man es gleich wieder vergrößern

    Außerdem: wenn wir nach einer Vergrößerung ein removeLast machen, muss man gleich wieder verkleinern
  - Deswegen machen wir es (erst mal) so:

    wenn ganz voll, Vergrößerung auf doppelte Größe

    wenn ein Viertel voll, Verkleinerung auf halbe Größe

    Für das Ü6 sollen Sie das verallgemeinern !

Laufzeitanalyse 1/7

- Jetzt wird es schwierig
  - Wir können jetzt beliebige Folgen von append und remove Operationen haben
  - Dann können wir nicht mehr so leicht vorhersagen, wann realloziert werden muss
  - Und das einfache Argument bei nur append (Vergrößerung bei 1, 2, 4, 8, …) funktioniert nicht mehr

Laufzeitanalyse 2/7

size = # Elemente

immer $c_i \geq s_i$

- Notation
  - Gegeben n Operationen $O_1, \ldots, O_n$

    eine beliebige Abfolge von append und removeLast
  - Sei s_i die Größe des Feldes **nach** Operation O_i $(s_0 := 0)$
  - Sei c_i die Kapazität des Feldes **nach** Operation O_i $(c_0 := 0)$
  - Sei wie vorher T_i die Zeit für Operation O_i

    $T_i \leq A$ falls keine Reallokation nötig

    $T_i \leq A + B \cdot s_i$ falls Reallokation nötig

    für irgendwelche Konstanten A und B unabhängig von n

Laufzeitanalyse 3/7

- Wir analysieren folgende Implementierungsversion
  - Falls Operation O_i ein append ist:

    Reallokation genau dann wenn $s_{i-1} = c_{i-1}$

    Vergrößerung so, dass danach $c_i = 2 \cdot s_i$
  - Falls Operation O_i ein removeLast ist:

    Reallokation genau dann wenn $4 \cdot s_{i-1} \leq c_{i-1}$

    Verkleinerung so, dass danach $c_i = 2 \cdot s_i$
  - In beiden Fällen ist also direkt nach der Reallokation

    $c_i = 2 \cdot s_i$ also das interne Feld doppelt so groß
  - Mit der Version hat man jederzeit $\mathbf{s_i \leq c_i \leq 4 \cdot s_i}$

    Ü6: Verallgemeinern auf $s_i \leq c_i \leq (1 + \varepsilon) \cdot s_i$

Laufzeitanalyse 4/7

- Beweisidee
  - Teuer sind nur die Operationen, wo realloziert werden muss
  - Wenn gerade realloziert wurde, dauert es eine Weile, bis wieder realloziert werden muss
  - Anders gesagt: nach einer teuren Operation kommt eine ganze Reihe billiger Operationen
  - **Genauer:** wenn nach einer Operation die X gekostet hat X Operationen kommen die alle nur 1 kosten, sind die Gesamtkosten bei n Operationen höchstens $2 \cdot n$
  - **Allgemeiner:** wenn nach einer Operation mit Kosten $c_1 \cdot X$ X Operationen kommen mit Kosten c_2, dann sind die Gesamtkosten bei n Operationen höchstens $(c_1 + c_2) \cdot n$

Laufzeitanalyse 5/7

- Formal beweisen wir jetzt Folgendes
  - Lemma: Wenn bei O_i eine Reallokation, dann findet für die nächsten $\lfloor s_i / 2 \rfloor$ Operationen keine Reallokation mehr statt
  - Korollar: Seien die Kosten einer Operation O_i ohne Reallokation $T_i \leq A$ und mit Reallokation $T_i \leq A + B \cdot s_i$

    Dann ist $T_1 + T_2 + \ldots + T_n \leq (A + 3B) \cdot n$

    also durchschnittliche Kosten $\leq A + 3 \cdot B = O(1)$

Laufzeitanalyse 6/7

5 10
s_i c_i

- Beweis des Lemmas

[Wenn bei O_i eine Reallokation stattfindet dann die nächsten $\lfloor s_i / 2 \rfloor$ Operationen nicht mehr]

Egal ob O_i append oder removeLast war, ist danach $c_i = 2 \cdot s_i$

DANACH:

bis zur nächsten Vergrößerung $\geq s_i$ Operationen (jede Op. macht s_i um höchstens 1 größer)

bis zur nächsten Verkleinerung $\geq \lceil s_i/2 \rceil$ Operationen (jede Op. macht s_i um höchstens 1 kleiner)

∎

Laufzeitanalyse 7/7

- Beweis des Korollars

[$T_1 + T_2 + \ldots + T_n \leq (A + 3B) \cdot n$]

Seien $O_{i_1}, \ldots, O_{i_\ell}$ die Operationen, bei denen die Reallokationen passieren. $i_1 < i_2 < \ldots < i_\ell$

Dann $\sum_{i=1}^{n} T_i \leq A \cdot n + \underbrace{\sum_{j=1}^{\ell} B \cdot s_{i_j}}_{= B \cdot (s_{i_1} + s_{i_2} + \ldots + s_{i_\ell})}$

Lemma $\Rightarrow$ $i_2 > i_1 + \lfloor s_{i_1}/2 \rfloor \Rightarrow i_2 \geq i_1 + s_{i_1}/2$

$\Rightarrow s_{i_1} \leq 2 \cdot (i_2 - i_1)$

allgemein $s_{i_j} \leq 2 \cdot (i_{j+1} - i_j)$

$s_{i_1} + s_{i_2} + \ldots + s_{i_\ell} \leq \underbrace{2 \cdot (i_2 - i_1) + 2 \cdot (i_3 - i_2) + 2 \cdot (i_4 - i_3) + \ldots + 2 \cdot (i_\ell - i_{\ell-1})}_{\text{Teleskopsumme}} + s_{i_\ell}$

$\leq 2 \cdot (\underbrace{i_\ell}_{\leq n} - \underbrace{i_1}_{\geq 0}) + \underbrace{s_{i_\ell}}_{\leq n} \leq 3 \cdot n$

Beweis mit Potenzialfunktion 1/5

- Variante des Beweises
  - Der Beweis auf den vorherigen Folien hat die Kosten für eine Folge von Operationen quasi "zu Fuß" analysiert
  - Man kann solche Beweise auch mit Hilfe einer sogenannten **Potenzialfunktion** führen
  - Intuitiv misst die Potenzialfunktion misst, wie robust die aktuelle Datenstruktur gegen teure Operationen ist:

    Teure Operationen (wie unser reallocate) sollen die Potenzialfunktion entsprechend erhöhen, und zwar um $\Omega(X)$, wenn die Kosten der Operation X waren

    Billige Operationen sollen die Potenzialfunktion um höchstens $\Theta(1)$, also eine Konstante, erniedrigen

Beweis mit Potenzialfunktion 2/5

- Potenzialfunktionen, Mastertheorem
  - Gegeben eine Folge von n Operationen $O_1, \ldots, O_n$ auf einer beliebigen Datenstruktur
  - Sei Φ eine Potenzialfunktion, wobei Φ_i = der Wert der Potenzialfunktion **nach** O_i und Φ_0 = Wert am Anfang ≥ 0
  - Sei T_i die Laufzeit für O_i mit $T_i \leq A + B \cdot (\Phi_i - \Phi_{i-1})$
  - Dann ist die Gesamtlaufzeit $\Sigma\, T_i = O(n + \Phi_n)$
- Beweis:

$$\sum_{i=1}^{n} T_i \leq \sum_{i=1}^{n} \left(A + B \cdot (\phi_i - \phi_{i-1})\right)$$

$$= A \cdot n + B \cdot \underbrace{\left((\phi_1 - \phi_0) + (\phi_2 - \phi_1) + \cdots + (\phi_n - \phi_{n-1})\right)}_{= \phi_n - \underbrace{\phi_0}_{\geq 0}}$$

$$= O(n + \phi_n)$$

Beweis mit Potenzialfunktion 3/5

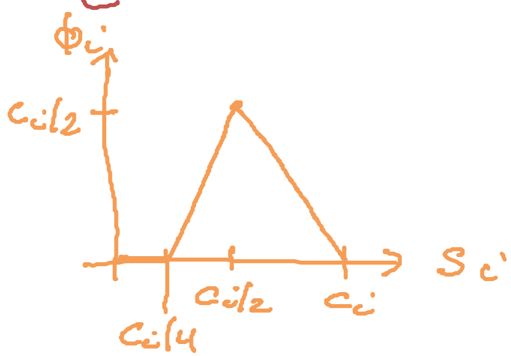
- Anwendung des Satzes für dynamische Felder
  - Wie vorher s_i = Größe (# Elemente) und c_i = Kapazität **nach** O_i $\quad s_i = 0,\ c_i = 0$
  - Definiere Φ_i := siehe unten

    Intuitiv: die Anzahl noch freier Plätze, aber nicht zu viele
  - Dann gilt $T_i \le A + B \cdot (\Phi_i - \Phi_{i-1})$ ... Beweis nächste Folie
  - Und damit gemäß Satz $\Sigma\, T_i = O(n + \Phi_n) = O(n)$

$$\Phi_i = \begin{cases} c_i - s_i & ; \quad s_i \ge c_i/2,\ s_i \le c_i \\ 2 s_i - c_i/2 & ; \quad s_i < c_i/2,\ s_i \ge c_i/4 \\ 0 & ; \quad \text{sonst} \end{cases}$$

$\Rightarrow \Phi_i \le s_i \le i$

$\Rightarrow \Phi_n \le n$

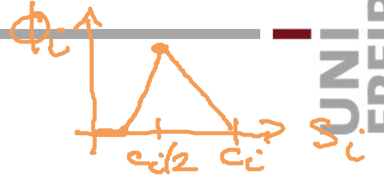


Beispiele:

c_i	s_i	Φ_i
100	100	0
100	80	20
100	50	50
100	30	10
100	25	0
100	0	0

Beweis mit Potenzialfunktion 4/5

$$\Phi_i = \begin{cases} c_i - s_i, & s_i \geq c_i/2 \\ 2 \cdot s_i - c_i/2 & s_i < c_i/2 \\ 0 & s_i < c_i/4 \end{cases}$$



- Beweis, dass $T_i \leq A + B \cdot (\Phi_i - \Phi_{i-1})$

<u>Fall 1</u>: O_i ist ein append, $s_{i-1} = c_{i-1}$, $c_i = 2 \cdot s_i$

$\Phi_{i-1} = 0$, $\Phi_i = s_i \Rightarrow \Phi_i - \Phi_{i-1} = s_i$

$T_i \leq A + B \cdot s_i = A + B \cdot (\Phi_i - \Phi_{i-1})$ ✓

<u>Fall 2</u>: O_i ist ein removeLast $4 \cdot s_{i-1} \leq c_{i-1}$, $c_i = 2 \cdot s_i$

$\Phi_{i-1} = 0$, $\Phi_i = s_i \Rightarrow \Phi_i - \Phi_{i-1} = s_i$

T_i ... genauso ✓

<u>Fall 3</u>: O_i ohne Reallokation

dann $|\Phi_i - \Phi_{i-1}| \leq 2 \Rightarrow \Phi_i - \Phi_{i-1} \geq -2$

$T_i \leq A = A + 2 - 2 \leq \underbrace{A + 2}_{\text{konst.}} + (\Phi_i - \Phi_{i-1})$

Beweis mit Potenzialfunktion 5/5

- Vergleich der beiden Beweise
  - Für die dynamischen Felder, war der "zu Fuß" Beweis einfacher
  - Der Beweis über die Potenzialmethode ist aber trotzdem etwas intuitiver, weil man das Potenzial intuitiv gut verstehen kann "wie gut ist der Zustand des Feldes gerade"
  - Wir werden in einer späteren Vorlesung eine Analyse sehen, wo der Beweis über eine Potenzialfunktion einfacher **und** intuitiver ist

Literatur / Links

- Dynamische Felder: Laufzeitanalyse
  - In Mehlhorn/Sanders:

    3.2 Unbounded Arrays
  - In Cormen/Leiserson/Rivest

    18.4 Dynamic Tables
  - In Wikipedia

    http://en.wikipedia.org/wiki/Dynamic_array
  - Potenzial vs. Potential

    http://www.duden.de/rechtschreibung/potenzial